www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

(L'épreuve comporte deux problèmes et deux exercices indépendants les uns des autres.)

Durée : 3 heures

PREMIER PROBLÈME

On considère l'espace E_2 des matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}$, où $a, b \in [0,1]$.

Ln désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que E_2 est stable pour le produit des matrices.

2. Déterminer les valeurs propres de A.

3. Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, montrer que A peut s'écrire : $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1-a & -1 \end{bmatrix}$.

   En déduire alors A^p, $p \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite, on suppose $a - b \neq 1$.

4. On dit que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ a une limite quand p tend vers l'infini si chaque coefficient de A^p a une limite quand p tend vers l'infini, et la limite de la suite est alors la matrice obtenue en prenant la limite de chaque coefficient.

   Étudier l'existence d'une limite à la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$. La calculer si elle existe.

5.*a.* On considère une suite de matrices A_k, $k \geqslant 1$, appartenant à E_2, définies par :

$$A_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ 1-a_k & 1-b_k \end{bmatrix}, \quad a_k, b_k \in [0,1],\ a_k > b_k,\ a_k - b_k \neq 1.$$

On pose $P_n = A_1 A_2 \ldots A_n$.

En étudiant Ln (Det P_n), montrer que la limite de Det P_n existe, quand n tend vers l'infini. (On pourra montrer que Ln (Det P_n) converge vers une valeur finie ou vers $-\infty$).

b. En posant $P_n = \begin{bmatrix} u_n & v_n \\ 1-u_n & 1-v_n \end{bmatrix}$, calculer $u_{n+1} - u_n$, $v_{n+1} - v_n$, $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de $u_n - v_n, a_{n+1}, b_{n+1}$.

En déduire le signe de ces expressions et la convergence de la suite de matrices P_n quand n tend vers l'infini.

c. On donne $a_k = 1 - \dfrac{k}{(k+2)2^k}$, $b_k = \dfrac{2^{k+1} - k(k+1)}{(k+1)(k+2)2^k}$.

Montrer que A_k vérifie les hypothèses de 5*a*.

Déterminer P_n pour tout $n \geqslant 1$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'équation différentielle : (E) $\quad x^2(x-1)y' + 2x^2 y - (x+1) = 0.$

On désigne par $(\mathcal{C})$ une courbe intégrale de (E).

1. Déterminer les solutions de (E) de la forme : $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Sans intégrer (E), trouver l'ensemble des points M des courbes $(\mathcal{C})$ où la pente de la tangente de M à $(\mathcal{C})$ est l'opposée de la pente de OM. (O origine du repère orthonormé).

3. Intégrer (E).

4. Soit $\mathcal{C}_0$ une courbe intégrale pour laquelle y' s'annule en $x = 1/2$. Construire $\mathcal{C}_0$.

5. Donner une résolution complète de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $u^5(u^4-1)\dfrac{dv}{du} - 8u^8 v + 4v^2(u^4+1) = 0.$

   On pourra faire le changement de variable $u^4 = x$, puis le changement de fonction $v = 1/y$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

1. On désigne par $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Montrer que pour $P \in \mathscr{P}$,

(*a*) $$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx + i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta = 0.$$

(On pourra commencer par vérifier cette égalité pour les éléments de la base canonique).

(*b*) $$\int_{-1}^{+1} [P(x)]^2\,dx + i \int_0^{\pi} [P(e^{i\theta})]^2\, e^{i\theta}\, d\theta = 0.$$

(*c*) $$\int_0^{+1} [P(x)]^2\,dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [P(x)]^2\,dx.$$

(*d*) $$\int_0^{+1} [P(x)]^2\,dx \leqslant 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta.$$

2. Soit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ une suite de nombres réels positifs.

Montrer que : $$\sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right).$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue à valeurs réelles positives, telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

On note $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

1. Montrer que la fonction F est continue, croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$, $\lim_{x \to -\infty} F(x)$, $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour $-\infty < a < b < +\infty$ et g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue, on a :

$$\int_a^b g(x) f(x)\,dx = F(b)\,g(b) - F(a)\,g(a) - \int_a^b g'(x) F(x)\,dx = g(b)(F(b) - 1) - g(a)(F(a) - 1) - \int_a^b g'(x)(F(x) - 1)\,dx.$$

3. On suppose que g est croissante sur $[0, +\infty[$, que $g(0) = 0$, et que $\int_0^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$ est convergente.

a. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x)(F(x) - 1) = 0$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} g(x) f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} g'(x)(1 - F(x))\,dx$.

4. On suppose que g est décroissante sur $]-\infty, 0]$, que $g(0) = 0$, et que $\int_{-\infty}^{0} g(x) f(x)\,dx$ est convergente.

Montrer que $\int_{-\infty}^{0} g(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} g'(x) F(x)\,dx$.

5. *a.* Montrer que si, pour $\alpha > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} f(x)\,dx$ est convergente, $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(1 - F(x) + F(-x))\,dx$ est convergente.

b. Établir la réciproque de *a.*

c. Comparer les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(1 - F(x) + F(-x))\,dx$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail